Exemplar für Prüfer/innen

Kompensationsprüfung zur
standardisierten kompetenzorientierten
schriftlichen Reife- und Diplomprüfung

BHS

Juni 2015

Angewandte Mathematik

Kompensationsprüfung (Cluster 5)
Angabe für **Prüfer/innen**

BM BF Bundesministerium für Bildung und Frauen
Bundes institut bifie

Hinweise zur standardisierten Durchführung der mündlichen Kompensationsprüfung in Angewandter Mathematik (BHS)

Die alle Fächer betreffenden Durchführungshinweise werden vom BMBF gesondert erlassen. Die nachfolgenden Hinweise sollen eine standardisierte Vorgehensweise bei der Durchführung der mündlichen Kompensationsprüfung in Angewandter Mathematik unterstützen.

- Die vorgesehene Prüfungszeit beträgt maximal 25 Minuten, die Vorbereitungszeit mindestens 30 Minuten.
- Die Arbeitszeit darf nicht überschritten werden.
- Falls am Computer gearbeitet wird, ist jede Seite vor dem Ausdrucken so zu beschriften, dass sie der Kandidatin / dem Kandidaten eindeutig zuzuordnen ist.
- Erlaubte Hilfsmittel: Die Verwendung eines durch die Schulbuchaktion approbierten Formelhefts und elektronischer Hilfsmittel (grafikfähige Taschenrechner oder andere entsprechende Technologie) ist erlaubt, sofern die Kommunikation nicht nach außen getragen werden kann und keine Eigendaten in die elektronischen Hilfsmittel implementiert sind. Handbücher zu den elektronischen Hilfsmitteln sind in der Original-Druckversion oder in im elektronischen Hilfsmittel integrierter Form zulässig.
- Schreiben Sie Beginn und Ende der Vorbereitungszeit ins Prüfungsprotokoll.
- Im Rahmen des Prüfungsgesprächs sind von der Prüferin / dem Prüfer die „verbalen Fragestellungen“ verpflichtend zu stellen.
- Nach der Prüfung sind alle Unterlagen (Prüfungsaufgabe, Arbeitsblätter etc.) der Kandidaten einzusammeln. Die Prüfungsunterlagen (Prüfungsaufgaben, Arbeitsblätter, produzierte digitale Arbeitsdaten etc.) dürfen nicht öffentlich werden.

Das Konzeptpapier zur mündlichen Kompensationsprüfung in Angewandter Mathematik finden Sie auf der BIFIE-Website: https://www.bifie.at/node/2315.

Relevanter Auszug aus dem Schulunterrichtsgesetz (§ 38 Abs. 5) zur Gesamtbeurteilung der beiden Teilprüfungen:

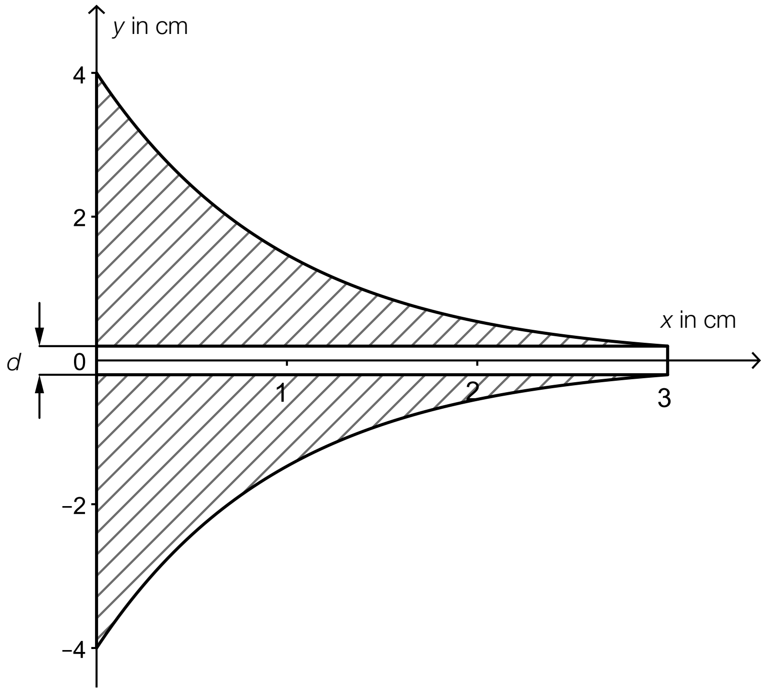
Sofern im Rahmen einer Vorprüfung Teilprüfungen abgelegt wurden, hat die Prüfungskommission der Vorprüfung auf Grund der gemäß Abs. 1 festgesetzten Teilbeurteilungen die Beurteilung der Leistungen des Prüfungskandidaten in diesen Prüfungsgebieten festzusetzen. Sofern im Rahmen der Klausurprüfung bei negativer Beurteilung einer Klausurarbeit eine zusätzliche mündliche Kompensationsprüfung abgelegt wurde, hat die Prüfungskommission der Hauptprüfung auf Grund der Teilbeurteilung der Klausurarbeit mit „Nicht genügend“ und der Teilbeurteilung der mündlichen Kompensationsprüfung die Beurteilung der Leistungen des Prüfungskandidaten im betreffenden Prüfungsgebiet mit „Befriedigend“, „Genügend“ oder „Nicht genügend“ festzusetzen.

a) Ein Schmuckstück kann als Rotationskörper beschrieben werden, der bei einer Rotation des Graphen der folgenden Funktion im Intervall [0; 3] um die x-Achse erzeugt wird:

$y = 4 \cdot e^{-x}$

x, y ... Koordinaten in Zentimetern (cm)

Damit das Schmuckstück an einer Kette befestigt werden kann, musste es durchbohrt werden. So entsteht ein zylindrisches Bohrloch mit einem Durchmesser d (siehe nachstehende Abbildung).



– Stellen Sie eine Formel zur Berechnung des Volumens dieses Schmuckstücks auf. (A)
– Berechnen Sie dieses Volumen. (B)

Lösung:

(A): $V = \pi \cdot \int_0^3 (4 \cdot e^{-x})^2 \mathrm{d}x - \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 3$

(B): $\frac{d}{2} = 4 \cdot e^{-3}$

Berechnung mittels Technologieeinsatz:
$V = 24{,}69\ldots \text{ cm}^3 \approx 24{,}7 \text{ cm}^3$

Verpflichtende verbale Fragestellung:

Der Graph einer Funktion f erzeugt bei Rotation um die x-Achse im Intervall $[a; b]$ einen Rotationskörper. Die Formel zur Berechnung des Volumens dieses Rotationskörpers lautet:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \mathrm{d}x$$

– Erklären Sie, wie man diese Formel herleiten kann. (R)

Den Rotationskörper kann man näherungsweise durch Zylinderscheiben der Breite Δx beschreiben. Der Funktionswert an einer Stelle x stellt den Radius der entsprechenden Zylinderscheibe dar. Die Querschnittsfläche der Zylinderscheibe wird mit $[f(x)]^2 \cdot \pi$ berechnet. Bei beliebiger Verfeinerung der Zerlegung, also $\Delta x \to \mathrm{d}x$, erhält man das Volumen des Rotationskörpers als Grenzwert. Das Aufsummieren der Volumenelemente entspricht dabei der Integration.

b) Eine Stadt hat zu einem Zeitpunkt $t = 0$ insgesamt 100 000 Einwohner/innen. Nach 3 Jahren hat diese Stadt 112 000 Einwohner/innen. Die Funktion E beschreibt das Bevölkerungswachstum für einen bestimmten Zeitraum: $E(t)$ ist die Anzahl der Einwohner/innen nach t Jahren. Die 1. Ableitung der Funktion E ist proportional zu E.

– Stellen Sie die zugehörige Differenzialgleichung für E auf. (A)
– Lösen Sie diese Differenzialgleichung mithilfe der Methode *Trennen der Variablen*. (B)
– Erklären Sie den Unterschied zwischen allgemeiner und spezieller Lösung einer Differenzialgleichung 1. Ordnung. (R)

Lösung:

(A): $\frac{dE}{dt} = k \cdot E$

(B): $\int \frac{dE}{E} = \int k\,dt$

$\ln|E| = k \cdot t + C$

allgemeine Lösung der Differenzialgleichung: E mit $E(t) = C \cdot e^{k \cdot t}$

$E(0) = 100\,000$ und $E(3) = 112\,000$ liefert: $C = 100\,000$ und $k = 0{,}0377...$
spezielle Lösung der Differenzialgleichung: E mit $E(t) = 100\,000 \cdot e^{0{,}0377 \cdot t}$

(R): Die allgemeine Lösung einer Differenzialgleichung sind unendlich viele Funktionen, die sich nur durch die Integrationskonstante voneinander unterscheiden. Durch Angabe eines Wertepaares kann aus diesen Funktionen eine bestimmte Funktion ausgewählt werden. Diese nennt man die spezielle Lösung.

Verpflichtende verbale Fragestellung:

Der jährliche prozentuelle Zuwachs der Einwohnerzahl dieser Stadt wird mit 3,5 % angenommen.

– Stellen Sie eine Funktion auf, die die Einwohnerzahl in Abhängigkeit von der Zeit in Jahren beschreibt. (A)
– Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren sich die Einwohnerzahl gemäß diesem Modell jeweils verdoppelt. (B)

$E(t) = 100\,000 \cdot 1{,}035^t$

t … Zeit in Jahren
$E(t)$ … Einwohnerzahl zur Zeit t

$200\,000 = 100\,000 \cdot 1{,}035^t$

$t = \frac{\ln(2)}{\ln(1{,}035)} = 20{,}1... \approx 20$

Die Einwohnerzahl verdoppelt sich nach etwa 20 Jahren.

c) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Motorradfahrer in einem bestimmten Streckenabschnitt zu schnell fährt, beträgt erfahrungsgemäß 2,6 %.

Für eine statistische Auswertung wurde eine Zufallsstichprobe von 36 Geschwindigkeitsmessungen untersucht.

– Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in dieser Zufallsstichprobe mindestens 1 Motorradfahrer zu schnell unterwegs war. (A, B)
– Berechnen Sie, wie groß der Umfang der Zufallsstichprobe sein müsste, sodass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 1 Motorradfahrer zu schnell unterwegs war. (A, B)

Lösung:

(A, B): Binomialverteilung:

$p = 0{,}026$, $n = 36$

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

$P(X \geq 1) = 0{,}6126... \approx 61{,}3\ \%$

(A, B): $1 - 0{,}974^n \geq 0{,}95$

$0{,}974^n \leq 0{,}05$

$n \geq 113{,}7... \approx 114$

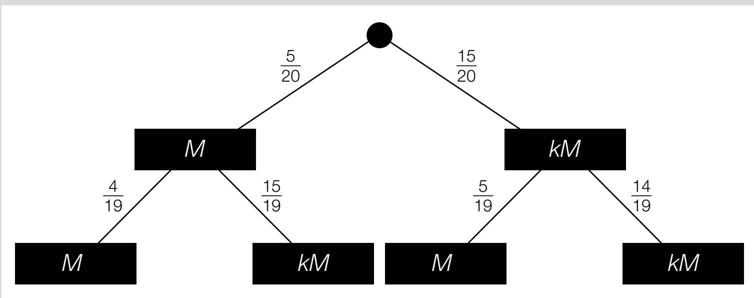
Ab einem Stichprobenumfang von 114 befindet sich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens ein zu schnell fahrender Motorradfahrer in dieser Stichprobe.

Verpflichtende verbale Fragestellung:

Von 20 Schülerinnen/Schülern eines Abschlussjahrgangs besitzen 5 ein Motorrad.

– Veranschaulichen Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeit, dass von 2 ausgewählten Schülerinnen/Schülern mindestens eine(r) ein Motorrad besitzt. (A)

M ... Schüler/in besitzt ein Motorrad
kM ... Schüler/in besitzt kein Motorrad



$P(\text{„mind. } 1 \times M\text{“}) = 1 - \frac{15}{20} \cdot \frac{14}{19}$