a) Auf einem Schuldach müssen Wartungsarbeiten durchgeführt werden.
Das Mobiltelefon eines Arbeiters fällt vom Schuldach in den Schulhof. Die jeweilige Höhe des Mobiltelefons über dem Schulhof zur Zeit t kann näherungsweise durch die Funktion h beschrieben werden:

$h(t) = 25 - 5 \cdot t^2$ mit $t \geq 0$

t ... Fallzeit in Sekunden (s)
$h(t)$ ... Höhe des Mobiltelefons über dem Schulhof zur Zeit t in Metern (m)

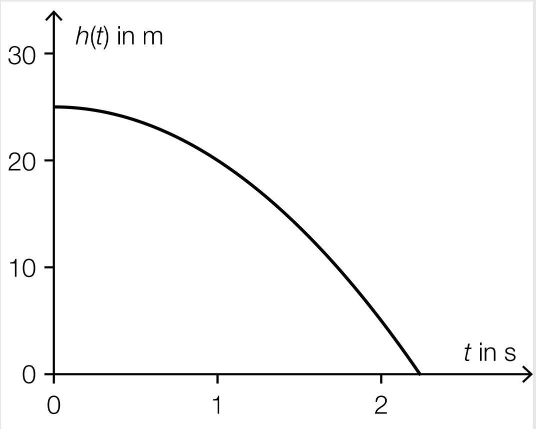
– Berechnen Sie die Zeit bis zum Aufprall des Mobiltelefons im Schulhof. (A, B)
– Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion in einem sinnvollen Definitionsbereich. (B)

Möglicher Lösungsweg:

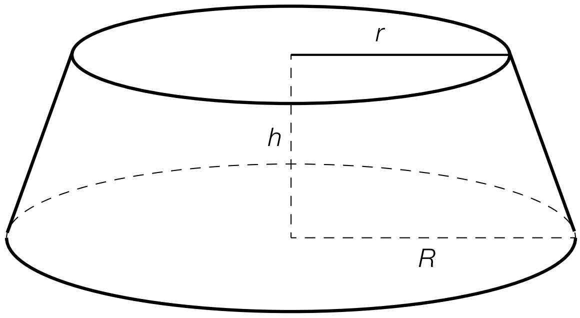
(A, B): $0 = 25 - 5 \cdot t^2$
$t = 2{,}236... \approx 2{,}24$

Nach rund 2,24 Sekunden trifft das Mobiltelefon im Schulhof auf.

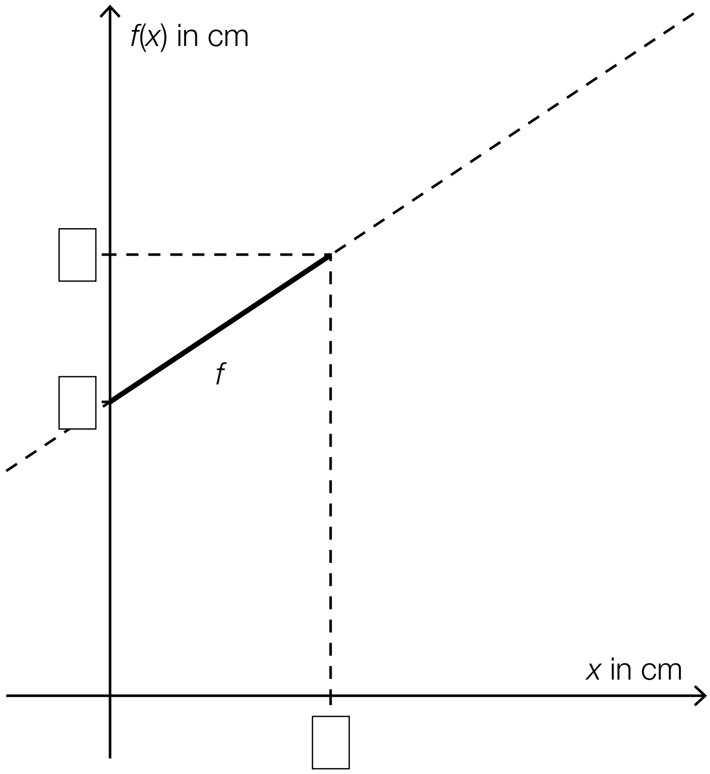
(B):



b) Ein Händler verkauft Figuren, die auf einem Sockel aus Holz stehen. Dieser hat die Form eines Kegelstumpfes.



Der dargestellte Kegelstumpf entsteht durch Rotation des Funktionsgraphen von f im Intervall $[0; h]$ um die horizontale Achse:



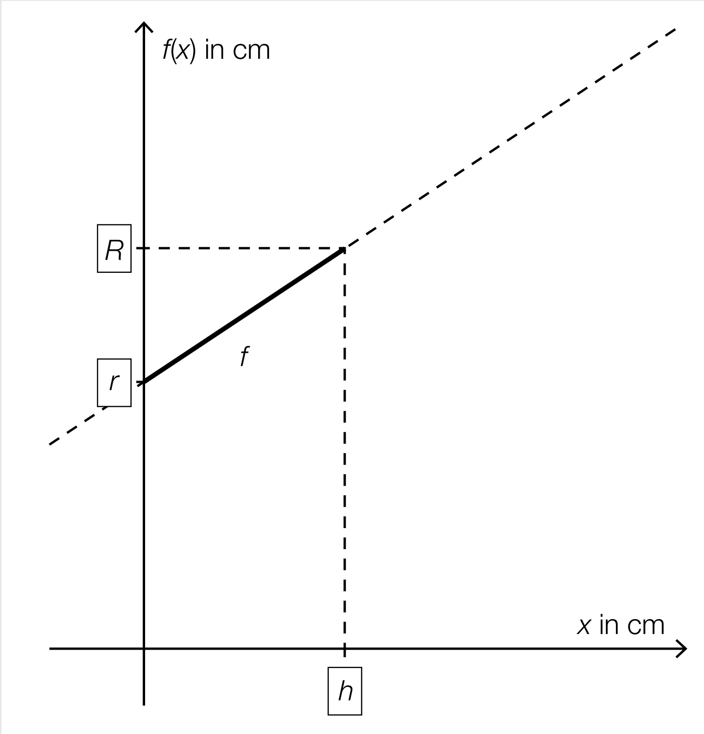
– Tragen Sie die fehlenden Beschriftungen h, r und R in die dafür vorgesehenen Kästchen ein. (A)

Es gilt: $h = 1{,}50$ cm, $r = 2{,}00$ cm und $R = 3{,}00$ cm.

– Stellen Sie mithilfe dieser Angaben die Gleichung der Funktion f auf. (A)
– Berechnen Sie das Rotationsvolumen des Kegelstumpfes mithilfe der Integralrechnung. (B)

Möglicher Lösungsweg:

(A):



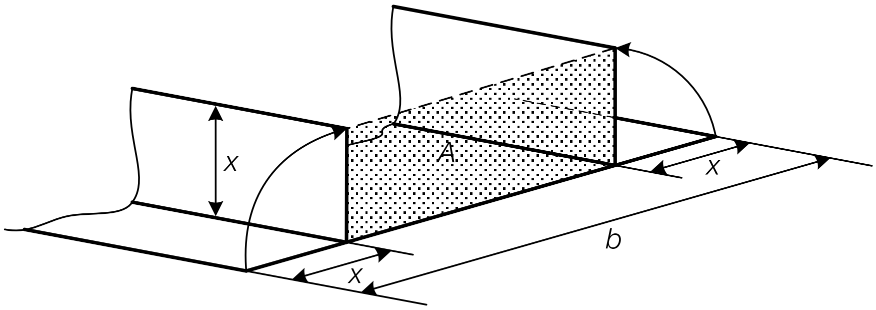
(A): Es handelt sich um eine lineare Funktion mit der Steigung $k = \frac{R - r}{h} = \frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ und dem Ordinatenabschnitt $d = r = 2$.

Daraus ergibt sich folgende Funktionsgleichung:
$f(x) = \frac{2}{3} \cdot x + 2$

(B): $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \, \mathrm{d}x = \pi \cdot \int_0^{1,5} \left(\frac{2}{3} \cdot x + 2\right)^2 \mathrm{d}x = 29,845...$

Das Rotationsvolumen beträgt rund 29,85 cm^3.

c) Aus einem Blechstreifen mit der Breite b soll eine Rinne mit einer rechteckigen Querschnittsfläche gebogen werden (siehe nachstehende Skizze).



– Stellen Sie eine Formel für den Flächeninhalt A dieser Querschnittsfläche auf, die nur b und x enthält. (A)

$A =$ ______________________________

Der Flächeninhalt der Querschnittsfläche kann für $b = 50$ cm in Abhängigkeit von x durch die Funktion f beschrieben werden:

$f(x) = 2 \cdot x \cdot (25 - x)$ mit $0 \leq x \leq 25$

x … Höhe in Zentimetern (cm)
$f(x)$ … Flächeninhalt der Querschnittsfläche bei einer Höhe x in cm²

– Berechnen Sie diejenige Höhe, die zu einem maximalen Flächeninhalt der Querschnittsfläche führt. (B)
– Zeigen Sie mithilfe der 2. Ableitung, dass für diese berechnete Höhe der Flächeninhalt der Querschnittsfläche maximal sein muss. (R)

<u>Möglicher Lösungsweg:</u>

(A): $A = (b - 2 \cdot x) \cdot x$

(B): $f'(x) = 0$
$50 - 4 \cdot x = 0$
$x_{max} = 12{,}5$ cm

(R): $f''(x) = -4 < 0$

Da die Funktionswerte der 2. Ableitung f'' stets negativ sind, handelt es sich um ein Maximum.