a) Die Chlorierung des Wassers in einem Schwimmbecken kann auf zwei Arten erfolgen:

Modell *A*: Pro Nutzungswoche wird dem Wasser eine Chlortablette zu je € 2,50 beigefügt.
Modell *B*: Mithilfe eines elektronischen Geräts mit einem Anschaffungspreis von € 390 wird der Chlorgehalt im Wasser konstant gehalten. Die dabei entstehenden Kosten für die Chlorbeigabe betragen € 0,40 pro Nutzungswoche.

– Stellen Sie die entsprechenden Kostenfunktionen für die beiden Modelle in Abhängigkeit von der Nutzungszeit auf. (A)
– Ermitteln Sie, ab welcher Nutzungszeit Modell *B* günstiger als Modell *A* ist. (A, B)

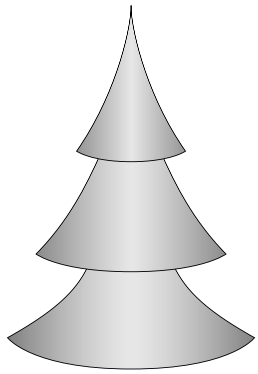
Möglicher Lösungsweg:

(A): $K_A(t) = 2{,}50 \cdot t$
$K_B(t) = 0{,}40 \cdot t + 390$

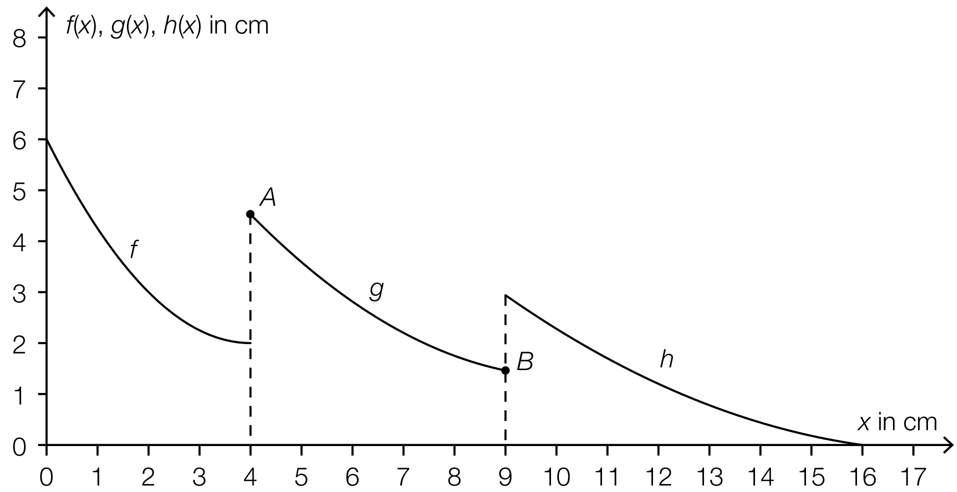
t ... Nutzungszeit in Wochen
$K_A(t)$, $K_B(t)$ … Kosten für die Nutzungszeit t in Euro

(A, B): $2{,}50 \cdot t = 0{,}40 \cdot t + 390$
$t = \frac{390}{2{,}10} = 185{,}7 \approx 186$
Bei einer Nutzungszeit von mindestens 186 Wochen ist Modell *B* günstiger.

b) Das 16 cm hohe Modell einer künstlerischen Interpretation eines Nadelbaums sieht folgendermaßen aus:



Die Form des Modells kann durch Rotation der Graphen der Funktionen f, g und h um die x-Achse beschrieben werden:



$A = (4{,}00|4{,}53)$
$B = (9{,}00|1{,}46)$

x ... horizontale Koordinate in Zentimetern (cm)
$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ ... vertikale Koordinate an der Stelle x in Zentimetern (cm)

– Stellen Sie unter Verwendung der Funktionen f, g und h eine Formel für das Volumen des Nadelbaummodells auf. (A)

Die Funktion g ist eine Polynomfunktion 2. Grades, deren Graph durch die Punkte A und B verläuft. Die Steigung der Tangente an den Graphen von g im Punkt A beträgt –1,02.

– Stellen Sie ein Gleichungssystem auf, mit dem man die Koeffizienten der Polynomfunktion g berechnen kann. (A)

Das Modell soll aus Fichtenholz mit einer Dichte von rund 0,5 g/cm³ gefertigt werden.
Folgende fehlerhafte Umrechnung der Dichte in kg/m³ wurde durchgeführt:

$$\frac{5 \cdot 10^{-1}\text{ g}}{1\text{ cm}^3} = \frac{5 \cdot 10^{-4}\text{ kg}}{1 \cdot 10^{-3}\text{ m}^3} = 5 \cdot 10^{-1}\text{ kg/m}^3$$

– Stellen Sie die Umrechnung richtig. (R)

Möglicher Lösungsweg:

(A): $V = \pi \cdot \int_0^4 (f(x))^2 \,\mathrm{d}x + \pi \cdot \int_4^9 (g(x))^2 \,\mathrm{d}x + \pi \cdot \int_9^{16} (h(x))^2 \,\mathrm{d}x$

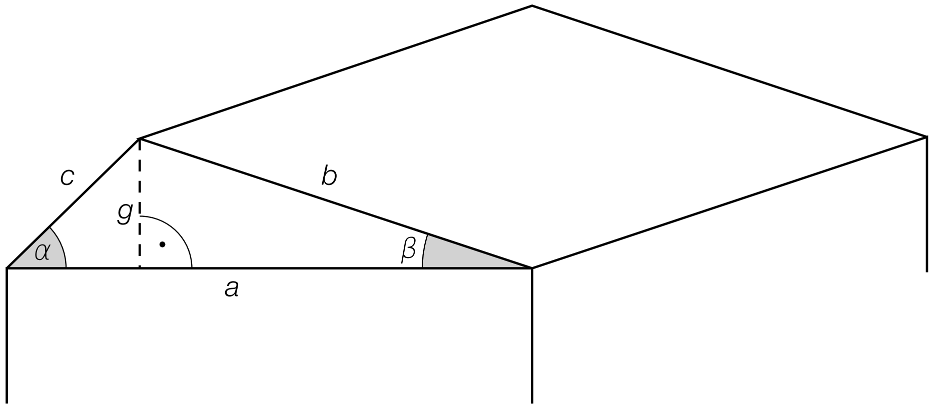
(A): $4{,}53 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c$
$1{,}46 = a \cdot 9^2 + b \cdot 9 + c$
$-1{,}02 = 2 \cdot a \cdot 4 + b$

oder:

$g(4{,}00) = 4{,}53$
$g(9{,}00) = 1{,}46$
$g'(4{,}00) = -1{,}02$

(R): $1\text{ cm}^3 = 1 \cdot 10^{-6}\text{ m}^3$, damit ergibt sich eine Dichte von 500 kg/m^3.

c) Zur Schneelastberechnung wird der Neigungswinkel α des in der nachstehenden Abbildung dargestellten Daches benötigt.



Dabei gilt:
$a = 20$ m, $b = 16$ m und $c = 7$ m

– Ermitteln Sie den Neigungswinkel α. (B)
– Berechnen Sie den Abstand g. (B)
– Beschreiben Sie, wie man α berechnen kann, wenn anstelle der Seite a der Winkel β gegeben ist. (R)

<u>Möglicher Lösungsweg:</u>

(B): $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\alpha)$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c}\right) = 46{,}42\ldots° \approx 46{,}4°$$

Der Neigungswinkel beträgt rund 46,4°.

(B): $\sin(\alpha) = \frac{g}{c} \iff g = c \cdot \sin(\alpha) = 7 \cdot \sin(46{,}42\ldots°) = 5{,}071\ldots \approx 5{,}07$

Der Abstand g beträgt rund 5,07 Meter.

(R): Zur Berechnung von α kann man den Sinussatz verwenden.

$$\frac{\sin(\alpha)}{b} = \frac{\sin(\beta)}{c}$$

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\sin(\beta) \cdot b}{c}\right)$$

Dabei kann vorausgesetzt werden, dass α kleiner als 90° ist.